1. Непосредственный подсчёт вероятностей. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

1.1. Найти вероятность p_n того, что случайно выбранное натуральное число из множества $\{1, 2,\ldots, n\}$ делится на фиксированное натуральное число k. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение: среди заданного набора чисел имеется $\left[\dfrac{n}{k}\right]$ кратных k. Поэтому по классическому определению вероятности $p_n = \dfrac{\left[n/k\right]}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{k}$ $\left(\dfrac{n-1}{nk} \le p_n \le \dfrac{n}{nk}\right)$.

1.2. Из множества $\{1, 2,\ldots, n\}$ случайно выбирается число a. Найти вероятность того, что число a не делится ни на одно из натуральных и попарно взаимно простых чисел $a_1,\ldots, a_k$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение: на каждое из чисел a_i делится $\left[\dfrac{n}{a_i}\right]$ чисел и заданного набора; тогда, поскольку a_i попарно взаимно просты ни на одно из них не делятся $x_n = n - \sum\limits_{i=1}^{k}\left[\dfrac{n}{a_i}\right]$ чисел. По классическому определению вероятности $p_n = \dfrac{x_n}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i}$ (аналогично 1.1).

1.3. Из множества $\{1, 2,\ldots, n\}$ случайно выбирается число a. Пусть p_n – вероятность того, что $a^2 - 1$ делится на 10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение: искомое событие реализуется в трёх случаях – $(a - 1)$ кратно 10; $(a + 1)$ кратно 10; $(a - 1)$ кратно 5 (2) и $(a + 1)$ кратно 2 (5). Последний случай сводится к двум первым, поскольку если одно из чисел – чётное, то и другое, отличающееся на 2, также чётное. Поэтому $p_n = \left[\dfrac{n-1}{10}\right] + \left[\dfrac{n+1}{10}\right]$; $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{5}$.

1.4. Из колоды карт (52 карты) вынимают одновременно 4 карты. Рассматриваются события: A – среди вынутых карт хотя бы одна бубновая; B – среди вынутых карт хотя бы одна червонная. Найти вероятность события $C = A \cup B$.

Решение: $p_A = p_B = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^4$; $p_{A\cap B} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow p_C = p_A + p_B - p_{A\cap B} = 1 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$.

1.5. Пусть $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ – пространство элементарных исходов, и все элементарные исходы равновероятны. Рассматриваются следующие события: $A = \{w_1, w_2\}$; $B = \{w_1, w_3\}$; $C = \{w_1, w_4\}$. Найти вероятности событий A, B и C. Являются ли указанные события независимыми?

Решение: согласно классической схеме расчёта вероятности $p(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{2} = p(B) = p(C)$. События A и B являются независимыми, если $p(AB) = p(A)\cdot p(B)$. $AB = BC = AC = ABC = \{w_1\} \Rightarrow p(AB) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = p(BC) = p(AC) = p(ABC)$, поэтому пары событий AB, AC и

BC независимы. Однако события A, B и C зависимы в совокупности, поскольку $\frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

1.6. Пусть результат некоторого случайного эксперимента состоит в появлении трёхмерного двоичного вектора (x_1, x_2, x_3), причём вероятности p_1,... p_8 появления векторов соответственно таковы:

$$p_1 = P\{(0,0,0)\} = 0{,}14;$$
$$p_2 = P\{(0,0,1)\} = 0{,}11;$$
$$p_3 = P\{(0,1,0)\} = 0{,}11;$$
$$p_4 = P\{(0,1,1)\} = 0{,}14;$$
$$p_5 = P\{(1,0,0)\} = 0{,}11;$$
$$p_6 = P\{(1,0,1)\} = 0{,}14;$$
$$p_7 = P\{(1,1,0)\} = 0{,}14;$$
$$p_8 = P\{(1,1,1)\} = 0{,}11.$$

Рассматриваются события: $A = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = 0\}$, $B = \{(x_1, x_2, x_3): x_2 = 0\}$, $C = \{(x_1, x_2, x_3): x_3 = 0\}$. Найти вероятности событий A, B и C. Являются ли указанные события независимыми?

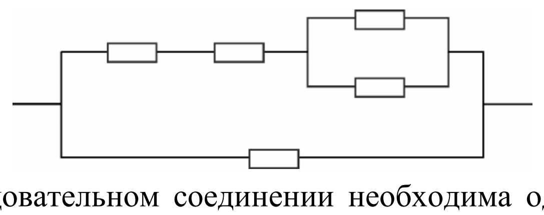
<u>Решение</u>: события 1, 2, 3 и 4 являются неперекрывающимися частями события A, поэтому $p(\mathrm{A}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.5$; аналогично $p(B) = p(C) = 0.5$. $p(AB) = p_1 + p_2 = 0.25$; аналогично $p(AC) = p(BC) = 0.25 = p(A)\cdot p(B)$. Таким образом, события A, B и C попарно независимы и зависимы в совокупности.

1.7. Бросаются две игральные кости. Пусть j – число очков, выпавшее на первой кости, k – число очков, выпавшее на второй кости. Рассматриваются следующие события: $A = \{(j,k): k = 1,2,5\}$; $B = \{(j,k): k = 4,5,6\}$, $C = \{(j,k): j + k = 9\}$. Найти вероятности событий A, B, C, AB, AC, BC, ABC.

<u>Решение</u>: согласно классической схеме расчёта вероятности $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3\cdot 6}{6\cdot 6} = \frac{1}{2} =$ $= p(B)$, где Ω – пространство всех возможных исходов (36 вариантов выпадения двух костей). $C = \{(4,5); (5,4); (3,6); (6,3)\} \Rightarrow p(C) = \frac{1}{9}$. $AB = \{(j,k): k = 5\}$, $AC = \{(4,5)\}$, $BC = \{(4,5); (5,4); (6,3)\}$, $ABC = \{(5,4)\} \Rightarrow p(AB) = \frac{1}{6}$, $p(AC) = p(ABC) = \frac{1}{36}$, $p(BC) = \frac{1}{12}$.

В задачах 1.8 – 1.17 требуется определить надёжность (вероятность безотказной работы в течение некоторого фиксированного времени T) прибора, схема которого приведена в соответствующей задаче. Надёжность каждого элемента равна p. Прибор считается работающим, если не поврежденной остаётся хотя бы одна цепочка от «входа к выходу» схемы. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга.

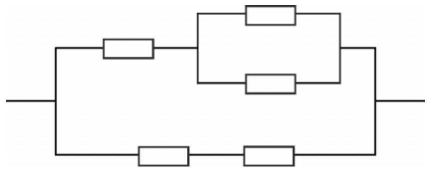
1.8.



<u>Решение</u>: при последовательном соединении необходима одновременная работа всех

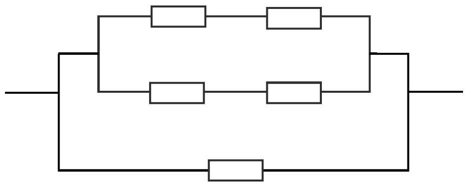
элементов, то есть надёжности перемножаются; при параллельном соединении необходима работа хотя бы одного из элементов; то есть надёжность может быть рассчитана как единица минус вероятность «отключения» всех элементов параллельной цепи: $1 - q^n$, где $q = 1 - p$. В данном случае $P = 1 - q\left(1 - p^2\left(1 - q^2\right)\right)$.

1.9.



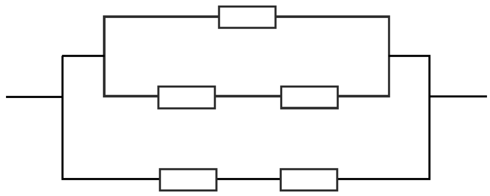
Решение: аналогично 1.8 $P = 1 - \left(1 - p^2\right)\left(1 - p\left(1 - q^2\right)\right)$.

1.10.



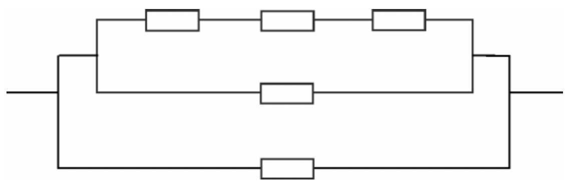
Решение: аналогично 1.8 $P = 1 - q\left(1 - \left(1 - \left(1 - p^2\right)^2\right)\right) = 1 - q\left(1 - p^2\right)^2$.

1.11.



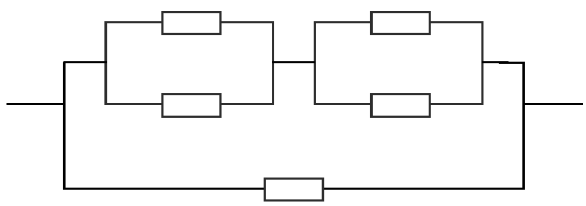
Решение: аналогично 1.8 $P = 1 - \left(1 - p^2\right)\left(1 - \left(1 - q\left(1 - p^2\right)\right)\right) = 1 - q\left(1 - p^2\right)^2$.

1.12.



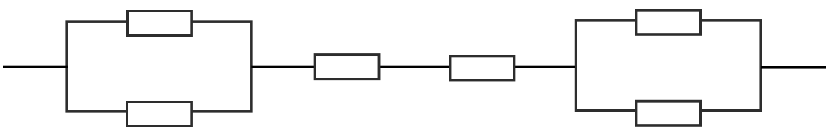
Решение: аналогично 1.8 $P = 1 - q\left(1 - \left(1 - q\left(1 - p^3\right)\right)\right) = 1 - q^2\left(1 - p^3\right)$.

1.13.



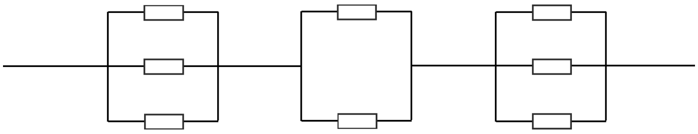
Решение: аналогично 1.8 $P = 1 - q\left(1 - \left(1 - q^2\right)^2\right)$.

1.14.



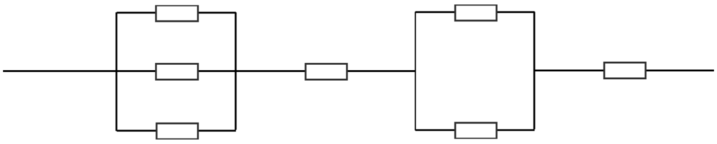
Решение: аналогично 1.8 $P = p^2\left(1 - q^2\right)^2$.

1.15.



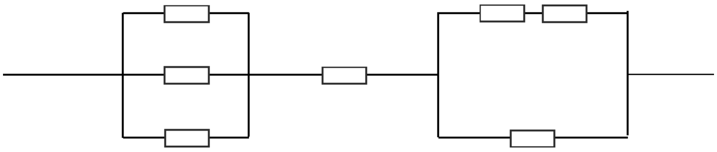
Решение: аналогично 1.8 $P=\left(1-q^2\right)\left(1-q^3\right)^2$.

1.16.



Решение: аналогично 1.8 $P=p^2\left(1-q^2\right)\left(1-q^3\right)$.

1.17.



Решение: аналогично 1.18 $P=p\left(1-q^3\right)\left(1-q\left(1-p^2\right)\right)$.

2. Формула полной вероятности.

2.1. Имеются две урны. В первой урне a_1 белых шаров и b_1 – чёрных, а во второй урне a_2 белых шаров и b_2 – чёрных. Из каждой урны извлекают по одному шару и перекладывают их в другую урну (из первой во вторую, из второй – в первую). Затем из первой урны извлекают (без возвращения) n шаров. Какова вероятность, что среди них окажется m белых?

Решение: по формуле полной вероятности $p=\sum_{i=1}^{4} p\left(A_i\right)p\left(B_i\right)$, где 1 – извлечение на первом этапе из урн двух белых шаров, 2 – белого и чёрного, 3 – чёрного и белого, 4 – двух чёрных. A_i – вероятность соответствующего исхода на первом этапе, B_i – на втором. Поэтому

$$p=\frac{a_1a_2}{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)}\frac{C_{a_1}^{m}\cdot C_{b_1}^{n-m}}{C_{a_1+b_1}^{n}}+\frac{a_1b_2}{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)}\frac{C_{a_1-1}^{m}\cdot C_{b_1+1}^{n-m}}{C_{a_1+b_1}^{n}}+\frac{b_1a_2}{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)}\frac{C_{a_1+1}^{m}\cdot C_{b_1-1}^{n-m}}{C_{a_1+b_1}^{n}}+$$
$$+\frac{b_1b_2}{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)}\frac{C_{a_1}^{m}\cdot C_{b_1}^{n-m}}{C_{a_1+b_1}^{n}}.$$

2.2. Из урны, в которой находятся a_1 белых шаров и b_1 чёрных удаляют один шар. После этого из урны извлекают (поочерёдно, с возвращением) n шаров. Какова вероятность, что среди них будет m белых шаров?

Решение: по формуле полной вероятности, получим $p=\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{C_{a_1+m-2}^{m}\cdot C_{b_1+n-m-1}^{n-m}}{C_{a_1+b_1+n-2}^{n}}+$

$$+\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{C_{a_1+m-1}^{m}\cdot C_{b_1+n-m-2}^{n-m}}{C_{a_1+b_1+n-2}^{n}}.$$

2.3. Имеются две урны. В первой урне a_1 белых шаров и b_1 – чёрных, во второй урне a_2 белых и b_2 чёрных. Из каждой урны удаляют по одному шару. Затем все шары из второй урны перекладывают в первую и из неё извлекают (без возвращения) n шаров. Какова вероятность, что среди них окажется m белых?

<u>Решение</u>: по формуле полной вероятности $p = \dfrac{a_1 a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \dfrac{C^m_{a_1+a_2-2} \cdot C^{n-m}_{b_1+b_2}}{C^n_{a_1+a_2+b_1+b_2-2}} +$

$$+\frac{a_1 b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \frac{C^m_{a_1+a_2-1} \cdot C^{n-m}_{b_1+b_2-1}}{C^n_{a_1+a_2+b_1+b_2-2}} + \frac{a_2 b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \frac{C^m_{a_1+a_2-1} \cdot C^{n-m}_{b_1+b_2-1}}{C^n_{a_1+a_2+b_1+b_2-2}} + \frac{b_1 b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \frac{C^m_{a_1+a_2} \cdot C^{n-m}_{b_1+b_2-2}}{C^n_{a_1+a_2+b_1+b_2-2}}.$$

2.4. Имеются две урны. В первой урне a_1 белых шаров и b_1 чёрных; во второй урне a_2 белых шаров и b_2 чёрных. Из первой урны извлекают 2 шара и перекладывают их во вторую урну. Затем из второй урны извлекают (поочередно, с возвращением) n шаров. Какова вероятность, что среди них окажется m белых шаров?

<u>Решение</u>: $p = \dfrac{C^2_{a_1}}{C^2_{a_1+b_1}} \dfrac{C^m_{a_2+m+1} \cdot C^{n-m}_{b_2+n-m-1}}{C^n_{a_2+b_2+n+1}} + \dfrac{a_1 b_1}{C^2_{a_1+b_1}} \dfrac{C^m_{a_2+m} \cdot C^{n-m}_{b_2+n-m}}{C^n_{a_2+b_2+n+1}} + \dfrac{C^2_{b_1}}{C^2_{a_1+b_1}} \dfrac{C^m_{a_2+m-1} \cdot C^n_{b_2+n-m+1}}{C^n_{a_2+b_2+n+1}}.$

2.5. Имеются две урны. В первой урне a_1 белых шаров и b_1 чёрных; во второй урне a_2 белых шаров и b_2 чёрных; в третьей урне a_3 белых шаров и b_3 чёрных. Из первых двух урн извлекают по одному шару и перекладывают их в третью урну. Затем из третьей урны извлекают без возвращения n шаров. Какова вероятность, что среди них окажется m белых шаров?

<u>Решение</u>:

$$p = \frac{a_1 a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \frac{C^m_{a_3+2} \cdot C^{n-m}_{b_3}}{C^n_{a_3+b_3+2}} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \frac{C^m_{a_3+1} \cdot C^{n-m}_{b_3+1}}{C^n_{a_3+b_3+2}} + \frac{b_1 b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \frac{C^m_{a_3} \cdot C^{n-m}_{b_3+2}}{C^n_{a_3+b_3+2}}.$$

2.6. В урне находится 9 белых шаров и 8 чёрных. Затем в урну добавляется 3 шара, причём каждый добавляемый шар независимо от остальных с вероятностью p окрашивается в белый цвет и с вероятностью $q = 1 - p$ в чёрный цвет. После этого из урны извлекают (без возвращения) 10 шаров. Какова вероятность, что среди них окажется 7 белых?

<u>Решение</u>: по формуле полной вероятности $p = p^3 \dfrac{C^7_{12} \cdot C^3_8}{C^{10}_{20}} + p^2 q \dfrac{C^7_{11} C^3_9}{C^{10}_{20}} + pq^2 \dfrac{C^7_{10} C^3_{10}}{C^{10}_{20}} +$

$$+q^3 \frac{C^7_9 C^3_{11}}{C^{10}_{20}}.$$

2.7. В урне находится 5 белых шаров и 5 чёрных. Затем производится частичная замена шаров следующим образом: каждый белый шар (независимо от других) с вероятностью p оставляется на месте, а с вероятностью $q = 1 - p$ окрашивается в чёрный цвет. После этого из урны извлекают (поочерёдно, с возвращением) 3 шара. Какова вероятность, что среди них окажется хотя бы один белый шар?

<u>Решение</u>: Искомое событие обратно к извлечению трёх чёрных шаров; тогда по формуле полной вероятности $p = \sum\limits_{k=0}^{5} \left(1 - p^k q^{5-k} \dfrac{C^3_{5+k+3-1}}{C^3_{10+3-1}} \right)$.

2.8. В урне находится 5 белых шаров и 5 чёрных. Каждый белый шар (независимо от других) с вероятностью p удаляется из урны, а с вероятностью $q = 1 - p$ оставляется в ней. После этого из урны извлекают (поочерёдно, с возвращением) 3 шара. Какова вероятность, что среди них окажется хотя бы один белый шар?

<u>Решение</u>: аналогично 2.7 $p = \sum\limits_{k=0}^{5} \left(1 - p^k q^{5-k} \dfrac{C^3_{5+3-1}}{C^3_{10-k+3-1}} \right)$.

3. Случайные величины. Дискретные распределения: биномиальное, геометрическое, Паскаля.

3.1. Производят N серий по 10 бросаний игральной кости в каждой серии. Какова вероятность, что ровно в k сериях ($0 \le k \le N$) шесть очков выпадет более трёх раз?

Решение: p_1 – вероятность того, что шесть очков выпадет более трёх раз хотя бы в одной серии составляет: $p_1 = 1 - q^{10} - pq^9 - p^2q^8 - p^3q^7 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 - \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$, где 1 – полная вероятность, а вычитаемые – вероятности выпадения шести очков 0, 1, 2 или 3 раза, рассчитанные для дискретного равномерного распределения. Вероятность необходимого исхода ровно в k сериях может быть рассчитана с помощью формулы для биномиального распределения: $P = C_N^k p_1^k \left(1 - p_1\right)^{N-k}$.

3.2. Производят N независимых испытаний. Испытание состоит в бросаниях игральной кости до второго появления числа очков, кратного трём; успехом считается второе появление указанного числа очков не позже пятого бросания кости. С какой вероятностью хотя бы в одном из N независимых испытаний произойдёт успех?

Решение: p_1 – вероятность необходимого исхода в одном испытании; её можно рассчитать по формуле для распределения Паскаля $\left(p = \frac{1}{3}\right)$. $p_1 = C_{2+0-1}^0 \cdot p^2q^0 + C_{2+1-1}^1 p^2q^1 + C_{2+2-1}^2 \cdot p^2q^2 + C_{2+3-1}^3 \cdot p^2q^3 = p^2 + 2p^2q + 3p^2q^2 + 4p^2q^3$. Необходимый исход хотя бы в одном испытании – событие, противоположное отсутствию этого исхода во всех испытаниях; поэтому $P = 1 - \left(1 - p_1\right)^N$.

3.3. Производят 100 серий бросаний монеты до первого появления герба в серии. Какова вероятность, что ровно в 15 сериях герб впервые появится при седьмом бросании монеты?

Решение: p_1 – вероятность необходимого исхода в одной серии; рассчитывается с помощью формулы для геометрического распределения. $p_1 = pq^6$, где $p = q = \frac{1}{2}$; искомая вероятность вычисляется по биномиальной схеме. $P = C_{100}^{15} \cdot p_1^{15}\left(1 - p_1\right)^{85}$.

3.4. Производят 20 серий бросаний игральной кости до третьего появления шести очков. Какова вероятность, что шесть очков появятся в третий раз при седьмом бросании кости хотя бы в одной из 20 серий?

Решение: p_1 – вероятность указанного события в одной серии; данные испытания описываются распределением Паскаля с n = 3 и k = 4: $p_1 = C_{3+4-1}^4 \cdot p^3q^4 = C_6^4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Вероятность появления нужного исхода хотя бы в одной из серий – событие, противоположное к отсутствию этого исхода во всех сериях, то есть $P = 1 - \left(1 - p_1\right)^{20}$.

3.5. Производят серию независимых испытаний до появления первого успеха. Каждое испытание состоит в n бросаниях игральной кости; успехом при этом считается выпадение хотя бы один раз трёх или четырёх очков. Какова вероятность, что успех впервые произойдёт в одиннадцатом испытании серии?

Решение: успех одного испытания – событие, противоположное к отсутствию успеха n

раз, то есть $p_1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ – вероятность успеха одного испытания. Для определения искомой вероятности применим формулу геометрического распределения: $P = p_1\left(1 - p_1\right)^{10}$.

3.6. Производят серию независимых испытаний до появления пятого успеха. Каждое испытание состоит в n бросаниях монеты; успехом при этом считается выпадение хотя бы одного герба. Какова вероятность, что серия закончится на девятом испытании?

Решение: p_1 – вероятность успеха в одном испытании, то есть выпадение герба в хотя бы одной из n попыток; это событие, противоположное к выпадению решётки во всех n испытаниях, то есть $p_1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Вероятность появления пятого успеха на девятом испытании определяется по формуле для распределения Паскаля: $p = C_{5+4-1}^4 p_1^5\left(1 - p_1\right)^4 = C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\cdot$

$\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^5.$

3.7. Производят серию независимых испытаний до появления первого успеха. Каждое испытание состоит в бросаниях игральной кости до второго появления тройки или четвёрки; успехом считается второе появление указанного числа очков при пятом бросании кости. Какова вероятность, что серия закончится на седьмом испытании?

Решение: вероятность p_1 успеха одного испытания может быть рассчитана по формуле для распределения Паскаля $p_1 = C_{3+2-1}^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3$; тогда искомая вероятность рассчитывается по формуле для геометрического распределения: $P = p_1\left(1 - p_1\right)^6 = \frac{32}{243}\left(1 - \frac{32}{243}\right)^6$.

3.8. Производят серию независимых испытаний до появления первого успеха. Каждый эксперимент состоит из n независимых испытаний с вероятностью положительного исхода p в каждом испытании. Успехом считается появление числа положительных исходов, превосходящего m ($0 \le m < n$). Какова вероятность, что успех впервые будет достигнут в пятом эксперименте серии?

Решение: вероятность успеха одного испытания $p_1 = \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$. Тогда по формуле для геометрического распределения $p = p_1\left(1 - p_1\right)^4$.

3.9. Имеется R урн ($R \ge 2$), каждая их которых содержит n перенумерованных (от 1 до n) шаров. Затем с каждой урной (независимо от остальных) проводится следующая процедура: каждый шар урны (независимо от остальных шаров) с вероятностью p удаляется из урны, а с вероятностью $q = 1 - p$ оставляется в ней. Пусть A_s – множество номеров шаров, оставшихся в s-ой урне, $s = 1,\ldots R$. Найти $P\left\{A_1 \cap \ldots \cap A_R = \varnothing\right\}$.

Решение: искомое событие есть объединение n событий, каждое из которых состоит в том, что шар с некоторым фиксированным номером удаляется из хотя бы одной урны. Вероятность последнего $p_1 = 1 - q^R$. Тогда, поскольку вытаскивание каждого из шаров осуществляется независимо от остальных, $p = np_1 = n(1 - q^R)$.

4. Числовые характеристики случайных величин.

4.1. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин $\xi = 2\nu - \mu$ и $\eta = \nu + 3\mu$, если случайные величины ν и μ независимы и распределены нормально с параметрами (a_1, σ_1) и (a_2, σ_2) соответственно.

Решение: для нормального распределения $\mathbf{M}\nu = a_1$, $\mathbf{M}\mu = a_2$, из свойств математического ожидания $\mathbf{M}\xi = 2\mathbf{M}\nu - \mathbf{M}\mu = 2a_1 - a_2$; $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}(2\nu - \mu)^2 - (2\mathbf{M}\nu - \mathbf{M}\mu)^2 = \mathbf{D}\nu + 4\mathbf{D}\mu - 4\mathbf{M}(\nu\mu) + 4\mathbf{M}\nu\cdot\mathbf{M}\mu = \mathbf{D}\nu + \mathbf{D}\mu = \sigma_1^2 + 4\sigma_2^2$. Аналогично $\mathbf{M}\eta = a_1 + 3a_2$; $\mathbf{D}\eta = \sigma_1^2 + 9\sigma_2^2$. $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{M}(3\nu + 2\mu)^2 - (\mathbf{M}(3\nu + 2\mu))^2 = 9\mathbf{D}\nu + 4\mathbf{D}\mu = 9\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2$. $2\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{D}(\xi + \eta) - \mathbf{D}\xi - \mathbf{D}\eta = 7\sigma_1^2 - 9\sigma_2^2 \Rightarrow \ \Rightarrow \operatorname{cov}(\xi,\eta) = \dfrac{7\sigma_1^2 - 9\sigma_2^2}{2}$.

4.2. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин $\xi = 3\nu - 2\mu$ и $\eta = \nu + 2\mu$, если случайные величины ν и μ независимы и имеют биномиальные распределения с параметрами (n_1, p_1) и (n_2, p_2) соответственно.

Решение: для биномиального распределения $\mathbf{M}\nu = n_1p_1$, $\mathbf{M}\mu = n_2p_2$, $\mathbf{D}\nu = n_1p_1(1 - p_1)$, $\mathbf{D}\mu = n_2p_2(1 - p_2)$; аналогично 4.1 $\mathbf{M}\xi = 3n_1p_1 - 2n_2p_2$, $\mathbf{D}\xi = 9n_1p_1(1 - p_1) + 4n_2p_2(1 - p_2)$; $\mathbf{M}\eta = n_1p_1 + 2n_2p_2$, $\mathbf{D}\eta = n_1p_1(1 - p_1) + 4n_2p_2(1 - p_2)$; $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}(4\nu) = 16n_1p_1(1 - p_1)$. $2\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{D}(\xi + \eta) - \mathbf{D}\xi - \mathbf{D}\eta = 6n_1p_1(1 - p_1) - 8n_2p_2(1 - p_2)$, то есть $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 3n_1p_1(1 - p_1) - 4n_2p_2(1 - p_2)$.

4.3. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин $\xi = -\nu - 2\mu$ и $\eta = \nu - 2\mu$, если случайные величины ν и μ независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Решение: для распределения Пуассона $\mathbf{M}\nu = \mathbf{D}\nu = \lambda_1$, $\mathbf{M}\mu = \mathbf{D}\mu = \lambda_2$, аналогично 4.1 $\mathbf{M}\xi = -\lambda_1 - 2\lambda_2$, $\mathbf{M}\eta = \lambda_1 - 2\lambda_2$, $\mathbf{D}\xi = \mathbf{D}\eta = \lambda_1 + 4\lambda_2$. $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}(-4\mu) = 16\lambda_2$; $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -\lambda_1 + 4\lambda_2$.

4.4. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин $\xi = 3\nu - 2\mu$ и $\eta = \nu + 2\mu$, если случайные величины ν и μ независимы и имеют показательные распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Решение: для показательного распределения $\mathbf{M}\nu = 1/\lambda_1$, $\mathbf{M}\mu = 1/\lambda_2$. $\mathbf{D}\nu = \lambda_1 \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda_1 x} dx - -\dfrac{1}{\lambda_1^2} = 2\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\lambda_1 x} dx - \dfrac{1}{\lambda_1^2} = \dfrac{1}{\lambda_1^2}$; $\mathbf{D}\mu = \dfrac{1}{\lambda_2^2}$. Аналогично 4.1 $M\xi = \dfrac{3}{\lambda_1} - \dfrac{2}{\lambda_2}$, $M\eta = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{2}{\lambda_2}$, $\mathbf{D}\xi = \dfrac{9}{\lambda_1^2} + \dfrac{4}{\lambda_2^2}$, $\mathbf{D}\eta = \dfrac{1}{\lambda_1^2} + \dfrac{4}{\lambda_2^2}$, $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}(4\nu) = \dfrac{16}{\lambda_1^2}$. $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \dfrac{3}{\lambda_1^2} - \dfrac{4}{\lambda_2^2}$.

5. Локальная предельная теорема. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа.

5.1. Сколько бросаний монеты нужно провести, чтобы с вероятностью, превосходящей 0.95, относительная частота появлений герба отличалась от вероятности появления герба по абсолютной величине не более, чем на 0.01?

Решение: вероятность выпадения герба $p = 0.5$; относительная частота появлений герба равна $\dfrac{\mu_n}{n}$, то есть требуется определить $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - 0.5\right| < 0.01\right\} = P\left\{-0.01 < \dfrac{\mu_n - np}{n} < 0.01\right\} =$

$= P\left\{-0.01\sqrt{\dfrac{n}{pq}} < \dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < 0.01\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right\} \approx 2\Phi_0\left(0,01\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$ по интегральной предельной теореме Муавра-Лапласа, где $\Phi_0(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du.$ Данная вероятность должна превысить 0.95, то есть, исходя из монотонности $\Phi_0(x)$, $0.01\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \geq 1.96,$ поэтому $\dfrac{n}{pq} = 4n \geq 196 \Rightarrow n \geq 49.$

5.2. Случайная величина μ_n распределена биномиально с параметрами (n, p). Найти (приближённо) значение z, при котором выполняется соотношение $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| > z\right\} = 0.0026,$ если n = 2500, а p = 0.1.

Решение: по аналогии с 5.1 $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| > z\right\} = 1 - P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| \leq z\right\} = 1 - P\left\{-z \leq \left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| \leq z\right\}$

$\approx 1 - 2\Phi_0\left(z\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0.0026 \Rightarrow \Phi_0\left(z\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) \approx 0.4987 \Rightarrow z\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \approx 3.0 \Rightarrow z \approx 0.018.$

5.3. Случайная величина μ_n распределена биномиально с параметрами (n, p). Найти (приближённо) значение p, при котором выполняется соотношение $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| < z\right\} = 0.9974,$ если n = 900, z = 0.03.

Решение: по аналогии с 5.1 $P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n} - p\right| < z\right\} =$

$= P\left\{-z\sqrt{\dfrac{n}{pq}} < \dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < z\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right\} \approx 2\Phi_0\left(z\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0.9974 \Rightarrow z\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \approx 3.0 \Rightarrow pq = 0.09 \Rightarrow p^2 - p +$

$+0.09 = 0 \Rightarrow p = \dfrac{1 \pm 0.8}{2} = 0.1;\ 0.9.$

5.4. В урне 10000 шаров, из них 5000 белых. Из урны извлекают (без возвращения) 100 шаров. Какова вероятность, что число белых шаров среди них находится между 45 и 55?

Решение: относительная частота появления белых шаров должна находиться между 0.45 и 0.55, то есть $P = P\left\{0.45 \leq \dfrac{\mu_n}{n} \leq 0.55\right\} = P\left\{0.45 - p \leq \dfrac{\mu_n}{n} - p \leq 0.55 - p\right\} = (p = 0.5) =$

$= P\left\{-0.05\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \leq \dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0.05\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right\} \approx (n = 100) \approx 2\Phi_0(1) = 0.6826.$

6. Многомерные распределения.

6.1. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) распределена равномерно в области D, ограниченной осью x и кривой $y = \exp(-x^2)$. Найти плотность совместного распределения $p_{1,2}(x, y)$, маргинальную плотность $p_1(x)$ и условную плотность $p_{2/1}(y/x)$. Являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 и зависимыми и коррелированными?

Решение: определим площадь области D. $S(D)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. Тогда по схеме равномерного распределения $p_{1,2}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$. $p_1(x)=\int\limits_{\mathbb{R}} p_{1,2}(x,y)dy=\int\limits_{0}^{e^{-x^2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}dy=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$.

$p_{2/1}(y/x)=\frac{p_{1,2}(x,y)}{p_1(x)}=e^{x^2}$. $p_2(y)=\begin{cases}\int\limits_{-\sqrt{-\ln y}}^{\sqrt{-\ln y}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}dx=2\sqrt{\frac{-\ln y}{\pi}}\\ 0, \ y<0, \ y>1;\end{cases}$ ξ_1 и ξ_2 зависимы: например, $p_{1,2}(0,1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\neq p_1(0)\,p_2(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 0=0.$

$\mathbf{M}\xi_1=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}dx=\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0=\mathbf{M}\xi_1^2\Rightarrow\mathbf{D}\xi_1=\mathbf{M}\xi_1^2-(\mathbf{M}\xi_1)^2=0,$ то есть коэффициент корреляции $\rho(\xi_1, \xi_2)$ не определён и судить о коррелированности нельзя.

6.2. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) распределена равномерно в области D, ограниченной окружностью радиуса R с центром в начале координат. Найти плотность совместного распределения $p_{1,2}(x, y)$, маргинальную плотность $p_1(x)$ и условную плотность $p_{2/1}(y/x)$. Являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимыми и коррелированными?

Решение: $S(D)=\pi R^2$, поэтому $p_{1,2}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$ $p_1(x)=\int\limits_{\mathbb{R}} p_{1,2}(x,y)dy=$

$=\begin{cases}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x|\le R\\ 0, \ |x|\ge R.\end{cases}$ $p_{2/1}(y/x)=\frac{p_{1,2}(x,y)}{p_1(x)}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}$ (функция определена только внутри D). Аналогично $p_2(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & |y|\le R\\ 0, |y|>R,\end{cases}$ ξ_1 и ξ_2 зависимы: например, $p_{1,2}(0,0)=\frac{1}{\pi R^2}\neq p_1(0)\cdot p_2(0)=\frac{4}{\pi^2R^2}$.

$\mathbf{M}\xi_1=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{2x\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}dx=\frac{-1}{\pi R^2}\cdot\frac{2}{3}\left(R^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_{-R}^{R}=0;$ $\mathbf{M}\xi_1^2=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{4x\left(R^2-x^2\right)}{\pi R^2}dx=$

$\frac{2}{\pi}x^2\Big|_{-R}^{R}-\frac{1}{\pi R^2}x^4\Big|_{-R}^{R}=0=\mathbf{D}\xi_1$. Поэтому, аналогично 6.1 коэффициент корреляции не определён и судить о коррелированности нельзя.

6.3. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) распределена равномерно в области D, ограниченной кривыми $y = e^x$, $y = -e^x$ при $x \le 0$ и $y = e^{-x}$, $y=-e^{-x}$ при $x > 0$. Найти плотность совместного распределения $p_{1,2}(x, y)$, маргинальную плотность $p_1(x)$ и условную плотность $p_{2/1}(y/x)$. Являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимыми и коррелированными?

Решение: в силу симметрии D относительно осей координат $S(D)=$

$= 4\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx = -4e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 4,$ поэтому $p_{1,2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$ $p_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{1,2}(x,y)\,dy =$

$= \begin{cases} \int\limits_{-e^x}^{e^x} \dfrac{dy}{4} = \dfrac{e^x}{2}, & x \le 0 \\ \int\limits_{-e^{-x}}^{e^{-x}} \dfrac{dy}{4} = \dfrac{e^{-x}}{2}, & x > 0. \end{cases}$ Аналогично $p_2(y) = \begin{cases} \int\limits_{-\ln(-y)}^{\ln(-y)} \dfrac{dx}{4} = \dfrac{\ln(-y)}{2}, & -1 \le y < 0 \\ \int\limits_{-\ln y}^{\ln y} \dfrac{dx}{4} = \dfrac{\ln y}{2}, & 0 < y \le 1. \end{cases}$ и равно 0 при остальных значениях *y*. $p_{2/1}(y/x) = \dfrac{p_{1,2}(x,y)}{p_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{2}, & x \le 0 \\ \dfrac{e^x}{2}, & x > 0. \end{cases}$ ξ_1 и ξ_2 зависимы: например, $p_{1,2}(0,1) = \dfrac{1}{4} \ne p_1(0)\,p_2(1) = \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0.$

$\mathbf{M}\xi_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{xe^x}{2}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{xe^{-x}}{2}dx = -\dfrac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 0;$ $\mathbf{M}\xi_1^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{xe^{2x}}{2}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{xe^{-2x}}{2}dx =$ $= -\dfrac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}dx + \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx = 0 \Rightarrow \mathbf{D}\xi_1 = 0,$ поэтому коэффициент корреляции не определён и судить о коррелированности невозможно.

6.4. Двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) распределена равномерно в области *D*, ограниченной эллипсом с полуосями *a*, *b* и центром в начале координат. Найти плотность совместного распределения $p_{1,2}(x, y)$, маргинальную плотность $p_1(x)$ и условную плотность $p_{2/1}(y/x)$. Являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимыми и коррелированными?

<u>Решение</u>: $S(D) = \pi ab$, поэтому $p_{1,2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}.$ $p_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{1,2}(x,y)\,dy =$

$= \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \dfrac{1}{\pi ab}dx = \dfrac{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}{\pi a} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}, & |x| \le a \\ 0, & |x| \ge a \end{cases}.$ Аналогично $p_2(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{b^2-y^2}}{\pi b^2}, & |y| \le b \\ 0, & |y| \ge b \end{cases}.$

$p_{2/1}(y/x) = 2b\sqrt{a^2-x^2}$: определена при $|x| \le a$. ξ_1 и ξ_2 зависимы: например, $p_{1,2}(0,0) = \dfrac{1}{\pi ab} \ne$ $\ne p_1(0)\,p_2(0) = \dfrac{4}{\pi^2 ab}.$ $\mathbf{M}\xi_1 = \mathbf{D}\xi_1 = 0$ (см. 6.2), поэтому коэффициент корреляции не определён и судить о коррелированности нельзя.